

wo $f=f(r_{12})f(r_{23})f(r_{13})$, $f(r)=0$ bzw. 1 für $mr<$ bzw. $>0,38$. Bei Vernachlässigung von Rückstoß- und Austauschwirkungen erhalten wir mit

$$V_{\text{Sp. B.}}^{3K} = (24/\pi) (f^2/4\pi)^3 (m/2M)^5 m \{ [x_{12}^{-1} (d/dx_{12}) (K_1(x_{12}+x_{23}+x_{13})/x_{12}x_{23}x_{13})] \mathbf{r}_{12} + 2 \rightleftharpoons 3, \mathbf{p}_1 \} \cdot \vec{\sigma}_1 + \text{zykl.} \} : \quad (45)$$

$$< V_{\text{Sp. B.}}^{3K} > = - (1/6) (q/m^3)^2 32\pi^2 (24/\pi) (f^2/4\pi)^3 (m/2M)^5 m \cdot \int_{x_c}^{\infty} dx \int_{x_c}^{\infty} dy |K_1(x+y+z)/z|_{z=\max(x_c, |x-y|)} \cdot$$

$$\text{Dies gibt mit } x_c=0,38 \text{ und } (f^2/4\pi)=14: < V_{\text{Sp. B.}}^{3K} > = -7,8 \text{ MeV } \zeta^2(\vec{l}_k, \vec{S}_k), \quad (48)$$

während der entsprechende Ausdruck für das Zweikörperpotential lautet:

$$< V_{\text{Sp. B.}}^{2K} > = 1,5 \zeta(\vec{l}_k, \vec{S}_k) \int_{x_c}^{\infty} dx x^2 (m/2M)^2 (1/x) (d/dx) V_{\text{Sp. B.}}^4 = 9,8 \text{ MeV } \zeta(\vec{l}_k, \vec{S}_k).$$

Der Erwartungswert der Austauschsterme wurde nicht berechnet. Es sollte nur gezeigt werden, daß die Dreikörperkraft einen Spin-Bahn-Beitrag mit dem richtigen Vorzeichen und in einer vernünftigen Größenordnung liefert. Es könnte also möglicherweise die Summation über alle Mehrkörperkräfte ungefähr zur richtigen Spin-Bahn-Kopplung füh-

ren, ohne daß man dafür die schwereren Mesonen heranziehen müßte.

Herrn Professor Heisenberg danke ich für sein förderndes Interesse und der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Ermöglichung meines Göttinger Aufenthaltes.

Nichtlokale Feldtheorie auf der Grundlage der Salpeter-Bethe-Gleichung

II. Wechselwirkung mit lokalisiertem Teilchen

Von H. L. JORDAN und W. E. FRAHN

Aus dem Institut für theoretische Physik und dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Aachen

(Z. Naturforschg. 9a, 572—578 [1954]; eingegangen am 23. April 1954)

Im Anschluß an eine vorhergehende Arbeit¹ wird die Salpeter-Bethe-Gleichung für den Fall der Wechselwirkung mit einem lokalisierten schweren Teilchen behandelt. Es wird gezeigt, daß die Wechselwirkung bereits in zweiter störungstheoretischer Näherung nichtlokale Struktur besitzt. Am Beispiel des einfachsten irreduziblen Graphen vierter Ordnung wird die Wechselwirkungsfunktion explizit berechnet, ihre Raumzeitstruktur und der Übergang zu lokalen Potentialen in adiabatischer Näherung diskutiert.

In I wurde aus der Zweiteilchen-Salpeter-Bethe-Gleichung durch Reduktion auf das Einteilchenproblem eine verallgemeinerte Dirac-Gleichung gewonnen, welche die Bewegung eines „freien“ Teilchens bei Wechselwirkung mit einem nirgends lokalisierten und daher durch ebene Wellen darstellbaren Feld beschreibt. Die erhaltene Gleichung hat die Form der aus nichtlokalen Theorien freier Teilchen bekannten Verallgemeinerungen der Dirac-Gleichung.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir in entsprechender Weise den Fall der Wechselwirkung eines Teilchens mit einem räumlich lokalisierten schweren Teilchen. Dabei zeigt sich, daß die Wechselwirkung nur in niedrigster Ordnung der Störungsrechnung (Leiter-Approximation) durch ein lokales Potential beschrieben wird, während die Terme höherer Ordnung nichtlokale Potentiale ergeben. Nach der Reduktion der Salpeter-Bethe-Gleichung (SBG) auf den Einteilchenfall (§1) werden die von einem lokalisierten schweren Teilchen herührenden Wechselwirkungsanteile niedrigster Ordnung berechnet (§2) und die Raum-Zeit-Struktur

¹ H. L. Jordan u. W. E. Frahn, Z. Naturforschg. 8a, 620 [1953], im folgenden mit I bezeichnet.



der Wechselwirkung diskutiert (§ 3). Sodann wird gezeigt, in welcher Näherung sich die nichtlokale Wechselwirkung auf lokale Potentiale reduziert und die adiabatische Näherung angegeben (§ 4). An die berechneten speziellen Beispiele schließen sich einige Folgerungen über die nichtlokale Struktur der vollständigen Wechselwirkung an (§ 5).

§ 1. Reduktion der Salpeter-Bethe-Gleichung auf den Einteilchenfall

In der SBG² für zwei Dirac-Teilchen

$$\psi(1, 2) = \psi_0(1, 2) + \iiint K_+(1, 1'') K_+(2, 2'') G(1'', 2''; 1', 2') \cdot \psi(1', 2') dx_1' dx_2' dx_1'' dx_2'' \quad (1a)$$

bzw. in differentieller Form

$$(i\gamma_{1\mu} \partial/\partial x_{1\mu} - m_1) (i\gamma_{2\nu} \partial/\partial x_{2\nu} - m_2) \psi(1, 2) = - \iint G(1, 2; 1', 2') \psi(1', 2') dx_1' dx_2' \quad (1b)$$

sind, wie in I, $\psi(1, 2)$ die Zwei-Teilchen-, Wellenfunktion³, K_+ die Feynmansche Transportfunktion für freie Dirac-Teilchen und G die vollständige Wechselwirkungsfunktion. In Streuzuständen stellt $\psi_0(1, 2)$ als Lösung der linken Seite von Gl. (1b) einlaufende freie Teilchen dar, während gebundene Zustände nur für $\psi_0(1, 2) \equiv 0$ möglich sind. Die vollständige Wechselwirkungsfunktion ist bisher nur als Reihenentwicklung nach Potenzen des Kopplungsparameters $e_1 e_2^*$ definiert. Die topologische Struktur der einzelnen Glieder dieser Entwicklung wird durch Graphen dargestellt. Ein Graph heißt im Sinne von Gl. (1) irreduzibel, falls er sich nicht durch einen Schnitt so in Teilgraphen zerlegen läßt, daß jede der Teilchenlinien nur einmal, jedoch keine Feldquantenlinie geschnitten wird. In der störungstheoretischen Entwicklung von G treten gemäß der Herleitung von Gl. (1) nur irreduzible Graphen auf. Löst man Gl. (1) für den Streufall mit Hilfe der Neumannschen Reihe, d. h. durch Iteration nach $\psi_0(1, 2)$, so erhält man in der Reihenentwicklung auch alle reduziblen Graphen und damit den Übergang zur Feynmanschen Störungstheorie.

Durch geeignete Aufspaltung der „Wellenfunktion“ $\psi(1, 2)$ kommt man zu Gleichungen, die nur von einer Koordinate abhängen. Für eine symmetrische Behandlung des Zweiteilchen-Problems ist

die Separation in Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$\psi(1, 2) = \exp[i P_\mu X_\mu] \varphi(x_\mu) \quad (2)$$

mit $x_\mu = x_{1\mu} - x_{2\mu}$, $X_\mu = a_1 x_{1\mu} + a_2 x_{2\mu}$, ($a_1 + a_2 = 1$) zweckmäßig. Falls jedoch Teilchen 2 schwer ist gegen Teilchen 1, kann $\psi(1, 2)$ durch ein Produkt von zwei Einteilchen-Wellenfunktionen approximiert werden

$$\psi(1, 2) = \psi_1(1) \psi_2(2). \quad (3)$$

Wie in I legen wir im folgenden den Produktansatz (3) zugrunde und entledigen uns damit der Problematik der Bedeutung und Quantisierung der Zweiteilchen-, Wellenfunktion⁴ $\psi(1, 2)$ ^{3, 4, 5, 6}. Die folgenden Überlegungen lassen sich in entsprechender Weise mit dem Ansatz (2) durchführen, wobei ebenfalls eine nichtlokale Struktur der Wechselwirkung erhalten wird, während die Analogie zur Dirac-Gleichung verloren geht. Die Produktaufspaltung (3) ist infolge des Random-Charakters der Vakuumfeldverteilung auch im Falle der Wechselwirkung eines Teilchens mit seinem Vakuumfeld möglich. Diese Zusammenhänge und ihre Bedeutung für eine andere Interpretation der Ergebnisse von I werden in einer anschließenden Arbeit behandelt.

Mit dem Ansatz (3) erhält man aus (1a), wie in I gezeigt, für Teilchen 1 die Dirac-Gleichung

$$(i\gamma_{1\mu} \partial/\partial x_{1\mu} - m_1) \psi_1(1) = \int K(1, 1') \psi_1(1') dx_1' \quad (4)$$

mit

$$K(1, 1') = i \iint \psi_2^+(2'') G(1, 2''; 1', 2') \psi_2(2'') dx_2' dx_2'' \quad (5)$$

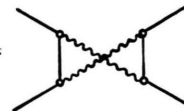
§ 2. Diskussion der Graphen niedrigster Ordnung

In der störungstheoretischen Entwicklung von G beschränken wir uns auf die irreduziblen Glieder erster und zweiter Ordnung in $e_1 e_2$, wobei wir von Selbstenergie- und Vertextermen absehen, d. h. wir

behandeln den „Leitergraphen“



und den „Kreuzgraphen“



$$G = G_1 + G_2 + \dots, \quad (6)$$

² E. E. Salpeter u. H. A. Bethe, Phys. Rev. **84**, 1233 [1951].

³ Hier wie im folgenden werden natürliche Einheiten, d. h. $\hbar = c = 1$, verwendet; $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$, $xy = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$.

⁴ E. E. Salpeter, Phys. Rev. **87**, 328 [1952].

⁵ J. S. Goldstein, Phys. Rev. **91**, 1516 [1953].

⁶ F. J. Dyson, Phys. Rev. **91**, 1543 [1953].

⁷ E. Freese, Z. Naturforschg. **8a**, 776 [1953].

$$G_1(1, 2''; 1', 2') = -i e_1 e_2 \gamma_{1\mu} \gamma_{2\mu} \cdot \delta_+(1, 2'') \delta(1, 1') \delta(2'', 2'), \quad (7)$$

$$G_2(1, 2''); 1', 2') = (-i e_1 e_2)^2 \delta_+(1, 2') \delta_+(2'', 1') \cdot \gamma_{1\mu} K_+(1, 1') \gamma_{1\nu} \gamma_{2\nu} K_+(2'', 2') \gamma_{2\mu}, \quad (8)$$

wobei δ_+ die Photon-Transportfunktion bedeutet.

In der Leiterapproximation $G = G_1$ wird für den Wechselwirkungskern in (4)

$$K^{(1)}(1, 1') = e_1 e_2 \gamma_{1\mu} \cdot \gamma \psi_2^+(2') \gamma_{2\mu} \psi_2(2') \delta_+(1, 2') dx_2' \cdot \delta(1, 1'). \quad (9)$$

Einsetzen in (4) gibt die Dirac-Gleichung

$$(i \gamma_{1\mu} \partial / \partial x_{1\mu} - m_1) \psi_1(1) = e_1 \gamma_{1\mu} A_\mu(1) \psi_1(1) \quad (10)$$

mit lokalem elektromagnetischem Viererpotential. In nichtrelativistischer Näherung ergibt sich für ein an der Stelle $\mathfrak{x} = 0$ punktförmig lokalisiertes Teilchen 2

$$(i \gamma_{1\mu} \partial / \partial x_{1\mu} - m_1) \psi_1(1) = \frac{e_1 e_2}{r_1} \gamma_{10} \psi_1(1). \quad (11)$$

Für den zum Kreuzgraphen gehörigen Wechselwirkungskern folgt mit (8) aus (5)

$$K^{(2)}(1, 1') = -i e_1^2 \gamma_{1\mu} K_+(1, 1') \gamma_{1\nu} \underline{K}_{\nu\mu}^{(2)}(1, 1') \quad (12)$$

mit

$$\underline{K}_{\nu\mu}^{(2)}(1, 1') = \iint \delta_+(1, 2') \delta_+(2'', 1') J_{\nu\mu}(2'', 2') dx_2' dx_2'', \quad (13)$$

wobei

$$J_{\nu\mu}(2'', 2') = e_2^2 \psi_2^+(2'') \gamma_{2\nu} K_+(2'', 2') \gamma_{2\mu} \psi_2(2') \quad (14)$$

den zum Teilchen 2 gehörigen Teil des Graphen darstellt.

Wir wollen nun annehmen, daß das Teilchen 2 im Ursprung lokalisiert ist, d. h. daß es auf einen Raumbereich beschränkt ist, dessen Ausdehnung klein gegen die Compton-Wellenlänge des ersten Teilchens ist. Wir nehmen daher für $\psi_2(2)$ ein Minimum-Wellenpaket der mittleren Breite $1/m_2$ mit periodischer Zeitabhängigkeit an

$$\psi_2(2) = m_2^{-3/2} \chi \exp[i m_2 t_2] \delta_m(\mathfrak{x}_2), \quad (15)$$

wobei δ_m eine Abkürzung für

$$\delta_m(\mathfrak{x}_2) = \pi^{-3/4} m_2^3 \exp\left[-\frac{1}{2} m_2^2 \mathfrak{x}_2^2\right] \quad (16)$$

ist. (16) ist so gewählt, daß sich im Limes $m_2 \rightarrow \infty$ für die Dichte eine δ -Funktion ergibt:

$$\lim_{m_2 \rightarrow \infty} \psi_2^+ \psi_2 = \delta(\mathfrak{x}_2).$$

χ ist ein konstanter Spinor mit $\chi^+ \chi = 1$. Damit wird (14)

$$J(2'', 2') = e_2^2 m_2^{-3} \exp[-i m_2(t_2'' - t_2')] \delta_m(\mathfrak{x}_2') \delta_m(\mathfrak{x}_2'') \chi^+ \gamma_{20} K_+(2'', 2') \gamma_{20} \chi, \quad (17)$$

wenn wir berücksichtigen, daß für das ruhende Teilchen von der gemischten Stromverteilung $J_{\nu\mu}(2'', 2')$ nur die Komponente $J_{00} = J$ von Null verschieden ist.

Einsetzen in (13) ergibt

$$\underline{K}^{(2)}(1, 1') = \frac{e_2^2}{m_2^3} \iint dt_2' dt_2'' \exp[-i m_2(t_2'' - t_2')] \delta_+(\mathfrak{x}_1, t_1 - t_2') \delta_+(\mathfrak{x}_1', t_2'' - t_1') \cdot \chi^+ \gamma_{20} \iint d^3 x_2' d^3 x_2'' K_+(t_2'' - t_2', \mathfrak{x}_2' - \mathfrak{x}_2'') \delta_m(\mathfrak{x}_2') \delta_m(\mathfrak{x}_2'') \gamma_{20} \chi, \quad (18)$$

wobei die bei $\mathfrak{x}_2' = \mathfrak{x}_2'' = 0$ konvergenten Anteile aus dem Integral herausgezogen wurden. Es bleibt zu berechnen ($t_2'' - t_2' = \tau$)

$$\begin{aligned} & \iint d^3 x_2' d^3 x_2'' K_+(\tau; \mathfrak{x}_2' - \mathfrak{x}_2'') \delta_m(\mathfrak{x}_2') \delta_m(\mathfrak{x}_2'') \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^{10}} \iint d^3 x_2' d^3 x_2'' \iiint d^4 k d^3 k' d^3 k'' \exp[i k_0 \tau - i \mathfrak{k}(\mathfrak{x}_2' - \mathfrak{x}_2'')] \cdot \frac{\gamma_{20} k_0 - \gamma_{2i} k_i - m_2}{k_0^2 - \mathfrak{k}^2 - m_2^2} \\ & \quad \cdot \exp[-i(\mathfrak{k}' \mathfrak{x}_2' + \mathfrak{k}'' \mathfrak{x}_2'')] \cdot \tilde{\delta}_m(\mathfrak{k}') \tilde{\delta}_m(\mathfrak{k}'') \\ &= -\frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{i k_0 \tau} \frac{\gamma_{20} k_0 - \gamma_{2i} k_i - m_2}{k_0^2 - \mathfrak{k}^2 - m_2^2} [\tilde{\delta}_m(\mathfrak{k})]^2. \end{aligned}$$

$\delta_m(\mathfrak{k})$ ist die Fourier-Transformierte von $\delta_m(\mathfrak{x})$ aus Gl. (16)

$$\tilde{\delta}_m(\mathfrak{k}) = 2^{3/2} \pi^{3/4} \exp\left[-\frac{\mathfrak{k}^2}{2 m_2^2}\right].$$

Bei der \mathfrak{k} -Integration entfallen die Terme mit k_i ($i=1, 2, 3$) und es bleibt nach Ausführung der Winkelintegrationen

$$\begin{aligned} & -2 i \pi^{-3/2} \int d k_0 e^{i k_0 \tau} (\gamma_{20} k_0 - m_2) \\ & \quad \cdot \int_0^\infty \frac{k^2}{\alpha^2 - k^2} \exp\left[-\frac{\mathfrak{k}^2}{2 m_2^2}\right] d k. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int_0^\infty \frac{k^2}{\alpha^2 - k^2} \exp\left[-\frac{k^2}{m_2^2}\right] d k = -\frac{\pi^{1/2}}{2} m_2 + \frac{\alpha}{2} \ln \left| \frac{\alpha + m_2}{\alpha - m_2} \right|.$$

Der zweite Term verschwindet für $k_0/m_2 \rightarrow 0$, ist daher in unserer Näherung vernachlässigbar. Einsetzen in Gl. (18) und Ausführung der τ - und der k_0 -Integration bei Beschränkung auf positive Energiezustände für Teilchen 2 ($\gamma_{20}=1$) ergibt

$$\underline{K}^{(2)}(1, 1') = \frac{e_2^2}{2m_2^2} \cdot \frac{\partial}{\partial t_1'} \int \delta_+(x_1, t_1 - t_2') \delta_+(x_1', t_2' - t_1') dt_2'. \quad (19)$$

Mit der Definition

$$\delta_+(t^2 - r^2) = \frac{1}{2r} [\delta_+(t - r) + \delta_+(-t - r)] \quad (20)$$

wird

$$\begin{aligned} & \int \delta_+(x_1, t_1 - t_2') \delta_+(x_1', t_2' - t_1') dt_2' \\ &= \frac{1}{2r_1 r_1'} \left\{ (r_1 + r_1') \delta_+[(t_1 - t_1')^2 - (r_1 + r_1')^2] \right. \\ & \quad \left. + (r_1 - r_1') \delta_+[(t_1 - t_1')^2 - (r_1 - r_1')^2] \right\} \quad (21) \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \underline{K}^{(2)}(1, 1') &= \frac{e_2^2}{4m_2^2} \frac{\partial}{\partial t_1'} \left\{ \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} \right) \delta_+[(t_1 - t_1')^2 - (r_1 + r_1')^2] \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'} \right) \delta_+[(t_1 - t_1')^2 - (r_1 - r_1')^2] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Die bisherige Rechnung wurde für den Fall der durch Photonen vermittelten Wechselwirkung zwischen Spinorteilchen durchgeführt. Um die Struktur der durch Teilchen endlicher Ruhemasse übertragenen Wechselwirkung zu untersuchen, behandeln wir im folgenden die Wechselwirkung eines Nukleons (Teilchen 1) mit einem im Ursprung lokalisierten schweren Zentrum (Teilchen 2) über ein Mesonfeld. Dieser Fall hat zwar keine unmittelbare physikalische Bedeutung, zeigt jedoch die wesentlichen Eigenschaften des symmetrischen Nukleon-Nukleon-Problems ohne dessen mathematische Schwierigkeiten.

In diesem Fall lautet die Einteilchengleichung

$$(i\gamma_{1\mu} \partial/\partial x_{1\mu} - M_1) \varphi(1) = \int L(1, 1') \varphi(1') dx_1' \quad (23)$$

mit

$$L(1, 1') = i \iint \Phi^+(2'') \mathcal{G}(1, 2''; 1', 2') \Phi(2') dx_2' dx_2''. \quad (24)$$

In der Störungsentwicklung von \mathcal{G} beschränken wir uns wieder auf die Glieder niedrigster Ordnung

$$\mathcal{G}_1(1, 2''; 1', 2') = -ig_1 g_2 \Gamma_\sigma^{(1)} \Gamma_\sigma^{(2)} \Delta_F(1, 2'') \cdot \delta(1, 1') \delta(2'', 2'), \quad (25)$$

$$\mathcal{G}_2(1, 2''; 1', 2') = (-ig_1 g_2)^2 \Delta_F(1, 2') \Delta_F(2'', 1') \cdot \Gamma_\sigma^{(1)} S_F(1, 1') \Gamma_\tau^{(1)} \Gamma_\tau^{(2)} \mathcal{S}_F(2'', 2') \Gamma_\sigma^{(2)}. \quad (26)$$

Darin bedeuten φ die Wellenfunktion und S_F die Transportfunktion des Nukleons (Masse M_1), Φ und \mathcal{S}_F die entsprechenden Größen für Teilchen 2 (Masse $M_2 \gg M_1$). Δ_F ist die Mesontransportfunktion (Mesonmasse μ), $g_1 g_2$ der Kopplungsparameter und $\Gamma_\sigma^{(i)}$ ein von der Art der Kopplung abhängiger Spinoperator, der nur auf Teilchen i wirkt.

In der Leiterapproximation wird

$$L^{(1)}(1, 1') = g_1 g_2 \Gamma_\sigma^{(1)} \cdot \int \Phi^+(2') \Gamma_\sigma^{(2)} \Phi(2') \Delta_F(1, 2') dx_2' \cdot \delta(1, 1') \quad (27)$$

und für im Ursprung punktförmig lokalisiertes Teilchen 2: $\Phi^+(2') \Gamma_\sigma^{(2)} \Phi(2') = \delta(x_2')$,

$$\begin{aligned} L^{(1)}(1, 1') &= g_1 g_2 \Gamma_\sigma^{(1)} \int \Delta_F(1, t_2') dt_2' \cdot \delta(1, 1') \\ &= g_1 g_2 \Gamma_\sigma^{(1)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} \delta(1, 1'). \end{aligned} \quad (28)$$

Damit wird

$$(i\gamma_{1\mu} \partial/\partial x_{1\mu} - M_1) \varphi(1) = g_1 g_2 \Gamma_\sigma^{(1)} \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1} \varphi(1) \quad (29)$$

die zu Gl. (11) analoge Dirac-Gleichung mit lokalem Yukawa-Potential. Für \mathcal{G}_2 wird

$$L^{(2)}(1, 1') = -ig_1^2 \Gamma_\sigma^{(1)} S_F(1, 1') \Gamma_\tau^{(1)} \underline{L}^{(2)}(1, 1') \quad (30)$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{L}^{(2)}(1, 1') &= g_2^2 \iint \Delta_F(1, 2'') \Delta_F(2'', 1') \Phi^+(2'') \Gamma_\tau^{(2)} \\ & \quad \cdot \mathcal{S}_F(2'', 2') \Gamma_\sigma^{(2)} \Phi(2') dx_2' dx_2''. \end{aligned} \quad (31)$$

Für ein im Ursprung lokalisiertes Teilchen 2 und mit einem Gl. (15) entsprechenden Wellenpaket erhält man bei Beschränkung auf skalare Kopplung ($\Gamma=1$)

$$\underline{L}^{(2)}(1, 1') = \frac{g_2^2}{2M_2^2} \frac{\partial}{\partial t_1'} \int \Delta_F(1, t_2') \Delta_F(t_2', 1') dt_2'$$

oder

$$\begin{aligned} \underline{L}^{(2)}(1, 1') &= \frac{g_2^2}{4M_2^2} \frac{\partial}{\partial t_1'} \left\{ \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} \right) \Delta_F[(t_1 - t_1')^2 - (r_1 + r_1')^2] \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'} \right) \Delta_F[(t_1 - t_1')^2 - (r_1 - r_1')^2] \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

§ 3. Die Raum-Zeit-Struktur der Wechselwirkung

Im folgenden vergleichen wir die nichtlokalen Wechselwirkungskerne $K^{(2)}(1, 1')$ bzw. $L^{(2)}(1, 1')$ mit den lokalen Anteilen $K^{(1)}(1, 1')$ bzw. $L^{(1)}(1, 1')$ bezüglich ihrer Raum-Zeit-Struktur. Bei nichtlokaler Wechselwirkung

$$(i\gamma_{1\mu} \partial/\partial x_{1\mu} - m_1) \psi_1(1) = \int K(1, 1') \psi_1(1') dx_1'$$

geht in die Wirkung an der Stelle 1 nicht nur der Wert der Wellenfunktion an dieser Stelle ein, sondern die Werteverteilung von ψ in einer Um-

gebung der Stelle 1, deren Ausdehnung durch den Träger des Wechselwirkungskerns $K(1, 1')$ bestimmt wird. In der störungstheoretischen Entwicklung enthalten die von der Leiterapproximation herrührenden Anteile nach Gl. (9) und (28) den Faktor $\delta(1, 1')$, so daß die Leiterapproximation in jedem Falle ein lokales Potential liefert. Dagegen besitzen die vom Kreuzgraphen herrührenden Anteile nichtpunktförmige Träger. Ein Sonderfall liegt vor, wenn der Wechselwirkungskern nur von der Koordinaten-

differenz abhängt: $K(1, 1') = K(1 - 1')$. Die Wechselwirkung ist dann vom Faltungstyp und liefert, wie in I gezeigt, ein additives Zusatzglied zur Impulsraum-Darstellung der freien Dirac-Gleichung. Dagegen sind im vorliegenden Fall $K^{(2)}(1, 1')$ und $L^{(2)}(1, 1')$ nur in den Zeitkoordinaten vom Faltungstyp, während sie von den Ortskoordinaten einzeln abhängen.

Zur Bestimmung des Trägers von $K(1, 1')$ und $L(1, 1')$ benützen wir die folgenden Darstellungen

$$K_+(x) = (\gamma_\mu \partial/\partial x_\mu - im) \Delta_F^{(m)}(x); \quad S_F(x) = (\gamma_\mu \partial/\partial x_\mu - iM) \Delta_F^{(M)}(x), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \Delta_F^{(u)}(x) &= \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) - \frac{\mu^2}{8\pi} \frac{H_1^{(2)}(\mu \sqrt{x^2})}{\mu \sqrt{x^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi} \delta(t^2 - r^2) - \frac{\mu^2}{8\pi} \cdot \begin{cases} \frac{H_1^{(2)}(\mu \sqrt{t^2 - r^2})}{\mu \sqrt{t^2 - r^2}} & t^2 - r^2 > 0 \\ -i \frac{2}{\pi} \frac{K_1(\mu \sqrt{r^2 - t^2})}{\mu \sqrt{r^2 - t^2}} & t^2 - r^2 < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (34)$$

(zeitartiger Bereich) ,
(raumartiger Bereich) ,

($H_1^{(2)}$, K_1 Hankel-Funktionen).

In der Umgebung des Lichtkegels sind die Singularitäten von $\Delta_F^{(u)}(x)$ gegeben durch

$$\Delta_F^{(u)}(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(x^2) - \frac{i}{4\pi^2 x^2} + \frac{i\mu^2}{8\pi^2} \ln \left(\gamma \frac{\mu \sqrt{|x^2|}}{2} - \frac{1}{2} \right), \quad \gamma = \text{Eulersche Konstante}, \quad \mu \sqrt{|x^2|} \ll 1. \quad (35)$$

Als asymptotische Darstellung erhält man

$$\Delta_F^{(u)}(x) = \begin{cases} -\frac{i e^{i\pi/4}}{2} \frac{\mu^2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\exp[-i\mu \sqrt{t^2 - r^2}]}{\mu^2 (t^2 - r^2)} & (\mu \sqrt{t^2 - r^2} \gg 1), \\ \frac{i}{2} \frac{\mu^2}{(2\pi)^{3/2}} \frac{\exp[-\mu \sqrt{r^2 - t^2}]}{\mu^2 (r^2 - t^2)} & (\mu \sqrt{r^2 - t^2} \gg 1). \end{cases} \quad (36)$$

Mit diesen Darstellungen ergibt sich aus den Gln. (12), (22) bzw. (30), (32):

Im Falle der Photonwechselwirkung ist der Träger gegeben durch den Durchschnitt der Punktmengen

$$\begin{aligned} (t_1 - t_1')^2 - (r_1 \pm r_1')^2 &= 0, \\ 2r_1 r_1' (\cos \vartheta \pm 1) &= s^2. \end{aligned}$$

Dabei ist s^2 der Viererabstand vom Punkt (x_1, t_1) , dem die Wechselwirkung zugeordnet wird ($s^2 > 0$ zeitartiger, $s^2 < 0$ raumartiger Bereich), ϑ der Winkel zwischen x_1 und x_1' , d. h. zwischen Zuordnungspunkt und Integrationspunkt. Als Durchschnitt ergeben sich für $s^2 = 0$ die in Abb. 1 in der (t_1', r_1') -Ebene gezeichneten Linien, auf denen $K(1, 1')$ mindestens wie $\delta_+(x^2)$ singulär ist, und zu denen für $s^2 \neq 0$ eine raumzeitliche Umgebung der Größenordnung $1/m_1$ hinzutritt. Im Fall der Mesonwechselwirkung ist hingegen die Ausdehnung des Wechsel-

wirkungsbereichs durch den Träger von $S_F(x_1 - x_1')$ gegeben. In beiden Fällen erstreckt sich daher die Wechselwirkung über Raum-Zeit-Bereiche von der Größenordnung der Compton-Wellenlänge des Teil-

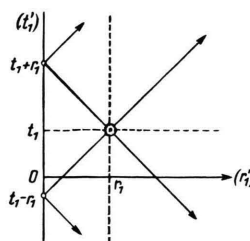


Abb. 1

chens 1. Bei Abständen, die klein gegen die Meson-Compton-Wellenlänge sind, wird diese Struktur durch die Lichtkegelanteile des auf der Linie $x' = 0$ befindlichen Teilchens 2 verändert. Darin äußert sich eine gewisse Symmetrie der Wechsel-

wirkung in den Teilchen 1 und 2, so daß der im vorhergehenden gerechnete in den Teilchen unsymmetrische Fall ($m_2 \gg m_1$) Rückschlüsse auf die Wechselwirkung im symmetrischen Fall ($m_2 \approx m_1$) gestattet.

§ 4. Reduktion auf lokale Potentiale und adiabatische Näherung

Die Änderung, welche die Berücksichtigung der nichtlokalen Struktur gegenüber einer durch ein lokales Potential beschriebenen Wechselwirkung mit sich bringt, hängt davon ab, wie groß die mittlere Ausdehnung der Wellenfunktion im Vergleich zu der des Trägers des Wechselwirkungskerns ist. Im Niederenergiebereich ist die Wellenfunktion $\psi_1(1')$ langsam veränderlich gegen den Wechselwirkungskern, sie kann daher auf der rechten Seite der Gleichung

$$(i\gamma_{1\mu}\partial/\partial x_{1\mu} - m_1) \psi_1(1) = \int K(1, 1') \psi_1(1') dx_1' \quad (37)$$

durch ihren Mittelwert auf dem Träger von $K(1, 1')$, d. h. durch $\psi_1(1)$, ersetzt werden. Dann reduziert sich die nichtlokale Wechselwirkung auf ein lokales Potential $V(1)$ und man erhält

$$(i\gamma_{1\mu}\partial/\partial x_{1\mu} - m_1) \psi_1(1) = V(1) \psi_1(1), \quad (37)$$

wobei

$$V(1) = \int K(1, 1') dx_1'. \quad (38)$$

Sobald jedoch die mittlere Ausdehnung der Wellenfunktion von der Größenordnung des Trägers von $K(1, 1')$, d. h. der Compton-Wellenlänge des betrachteten Teilchens wird, spielt die Struktur von $K(1, 1')$ eine ausschlaggebende Rolle. Bei gebundenen Zuständen im Niederenergiebereich (z. B. Wasserstoffatom, Deuteron) ist die mittlere Ausdehnung der Wellenfunktion groß gegenüber der des nichtlokalen Wechselwirkungsbereichs und die durch Gl. (37) und (38) gegebene „lokale Näherung“ anwendbar. Falls man sich Elementarteilchen als gebundene Zustände vorzustellen hat, in denen die Bindungsenergie mit den Ruhmassen der beteiligten Teilchen vergleichbar ist, wird hingegen die Nichtlokalität wesentlich. Während also im Niederenergiebereich die nichtlokale Struktur vernachlässigbar ist, sind im Hochenergiebereich größere Abweichungen vom lokalen Wechselwirkungsformalismus zu erwarten.

In der lokalen Näherung beginnt die Störungsentwicklung von V mit

$$V = V_1 + V_2 + \dots, \quad (39)$$

$$\text{wobei} \quad V_1^{(P)}(1) = \frac{e_1 e_2}{r_1} \gamma_{10} \quad (40)$$

$$\text{bzw.} \quad V_1^{(M)}(1) = g_1 g_2 \frac{e^{-\mu r_1}}{r_1}, \quad (41)$$

$$V_2^{(P)}(1) = -\frac{i}{4} \frac{e_1^2 e_2^2}{m_2^2} \int dx_1' \gamma_{10} K_+(1, 1') \gamma_{10} \cdot \frac{1}{r_1 r_1'} \left\{ (r_1 + r_1') \frac{\partial}{\partial t_1'} \delta_+ [(t_1 - t_1')^2 - (r_1 + r_1')^2] + (r_1 - r_1') \frac{\partial}{\partial t_1'} \delta_+ [(t_1 - t_1')^2 - (r_1 - r_1')^2] \right\} \quad (42)$$

bzw.

$$V_2^{(M)}(1) = -\frac{i}{4} \frac{g_1^2 g_2^2}{M_2^2} \int dx_1' S_F(1, 1') \cdot \frac{1}{r_1 r_1'} \left\{ (r_1 + r_1') \frac{\partial}{\partial t_1'} \Delta_F [(t_1 - t_1')^2 - (r_1 + r_1')^2] + (r_1 - r_1') \frac{\partial}{\partial t_1'} \Delta_F [(t_1 - t_1')^2 - (r_1 - r_1')^2] \right\}. \quad (43)$$

Der obere Index (P) bedeutet Wechselwirkung durch Photonen, (M) durch neutrale skalare Mesonen.

In V_2 führen wir nun die adiabatische Näherung ein, d. h. wir vernachlässigen die Retardierung in den Transportfunktionen der feldtragenden Teilchen.

$$\delta_+(t^2 - \mathbf{x}^2) \rightarrow \delta(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_+(t'^2 - \mathbf{x}^2) dt' = \frac{1}{|\mathbf{x}|} \delta(t),$$

$$\Delta_F(t^2 - \mathbf{x}^2) \rightarrow \delta(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_F(t'^2 - \mathbf{x}^2) dt' = \frac{e^{-\mu|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \delta(t). \quad (44)$$

Damit wird

$$V_{2, \text{ad}}^{(P)}(1) = -\frac{i}{4} \frac{e_1^2 e_2^2}{m_2^2} \int dx_1' \gamma_{10} K_+(1, 1') \gamma_{10} \cdot \frac{1}{r_1 r_1'} [1 + \varepsilon(r_1 - r_1')] \delta'(t_1 - t_1'), \quad (45)$$

$$V_{2, \text{ad}}^{(M)}(1) = -\frac{i}{4} \frac{g_1^2 g_2^2}{M_2^2} \int dx_1' S_F(1, 1') \cdot \frac{1}{r_1 r_1'} [e^{-\mu(r_1 + r_1')} + \varepsilon(r_1 - r_1') e^{-\mu|r_1 - r_1'|}] \delta'(t_1 - t_1'), \quad (46)$$

wobei

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} +1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

K_+ bzw. S_F sind schnell veränderlich gegenüber dem Rest des Integranden. Wir können diesen daher näherungsweise durch seinen Mittelwert ersetzen. Dann bleibt

$$V_{2, \text{ad}}^{(P)}(1) = -\frac{i}{4} \frac{e_1^2 e_2^2}{m_2^2 r_1^2} \int dx_1' \gamma_{10} K_+(1, 1') \gamma_{10} \cdot \delta'(t_1 - t_1')$$

$$= \frac{i}{4} \frac{e_1^2 e_2^2}{m_2^2 r_1^2} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \int d^3 x_1' \gamma_{10} K_+(1, 1') \gamma_{10} \right]_{\tau=0}$$

$$= -\frac{\pi}{4} \frac{m_1}{m_2^2} \gamma_{10} \frac{e_1^2 e_2^2}{r_1^2}, \quad (47)$$

$$V_{2,\text{ad}}^{(\text{M})}(1) = -\frac{\pi}{4} g_1^2 g_2^2 \frac{M_1}{M_2^2} \frac{e^{-2\mu r_1}}{r_1^2}. \quad (48)$$

In der adiabatischen Näherung ergibt also der Kreuzgraph ein lokales Zusatzpotential, das für $m_2 \rightarrow \infty$ bzw. $M_2 \rightarrow \infty$ verschwindet. Da $1/M_2$ gleichzeitig als Breite des das zweite Teilchen darstellenden Wellenpaketes genommen wurde, verschwindet $V_{2,\text{ad}}$ auch im Falle punktförmiger Lokalisierung.

Der Übergang zu den lokalen adiabatischen Potentialen vollzieht sich daher in zwei Schritten:

1. der „lokalen Näherung“, die für das Verhältnis

$$\frac{\text{Wechselwirkungsenergie}}{\text{Gesamtenergie}} \ll 1 \quad \text{gültig ist,}$$

2. der „adiabatischen Näherung“, die für das Verhältnis

$$\frac{\text{Teilchengeschwindigkeit}}{\text{Feldausbreitungsgeschwindigkeit}} \ll 1 \quad \text{gilt.}$$

Da sich die bisherige Diskussion der Zweiteilchen-Wechselwirkung aus der SBG (Salpeter³, Levy⁷, Klein⁸, Macke⁹) auf den Niederenergiebereich beschränkt, wird dabei die lokale Näherung verwendet. Die nichtlokale Natur der Wechselwirkung äußert sich jedoch dann im Auftreten geschwindigkeitsabhängiger Potentiale, welche durch Entwicklung der nichtlokalen Potentiale im Impulsraum nach Potenzen des Relativimpulses erhalten werden. Diese Korrekturterme können als lokale Potentiale höherer Ordnung aufgefaßt werden^{7,8}. Im Hochenergiebereich müßte jedoch die Nichtlokalität mindestens in Form einer asymptotischen Entwicklung im Impulsraum berücksichtigt werden.

⁷ M. M. Levy, Phys. Rev. 88, 72, 725 [1952].

⁸ A. Klein, Phys. Rev. 90, 1101 [1953].

⁹ W. Macke, Z. Naturforschg. 8a, 599, 615 [1953].

§ 5. Die nichtlokale Struktur der vollständigen Wechselwirkung

Im vorhergehenden ist gezeigt worden, daß die störungstheoretische Entwicklung der vollständigen Wechselwirkungsfunktion der SBG bei Reduktion auf eine Einteilchen-Gleichung Wechselwirkungsterme liefert, von denen der Term erster Ordnung ein lokales Potential ergibt, während bereits der nächsthöhere irreduzible Anteil nichtlokal ist. Die Terme höherer Ordnung beschreiben die Beiträge von Prozessen, bei denen mehrere Quanten zugleich im Felde sind und werden durch Graphen mit mehreren sich kreuzenden Quantenlinien dargestellt. Die Forderung, daß nur irreduzible Graphen zu berücksichtigen sind, bedeutet, daß alle Graphen aus G die topologische Eigenschaft haben, ein irreduzibles Raum-Zeit-Gebiet aufzuspannen. Ein singulärer Fall liegt beim Leitergraphen vor, der nur eine Quantenlinie enthält. In einer anschließenden Arbeit wird in allgemeinerem Zusammenhang gezeigt, daß das irreduzible Aufspannen eines endlichen Raum-Zeit-Gebiets durch einen Graphen für die Nichtlokalität der hierdurch beschriebenen Wechselwirkung kennzeichnend ist. Daraus folgt einmal die Sonderstellung der Leiter-Approximation, die in Strenge auf ein lokales Potential führt, zum anderen daß alle höheren Wechselwirkungsanteile nichtlokal sind. Die durch G dargestellte vollständige Wechselwirkung ist somit einer integralen nichtlokalen Strukturfunktion äquivalent. In Verallgemeinerung der in Teil I und II der vorliegenden Arbeit behandelten Grenzfälle läßt sich ein Störungsverfahren für die Feynmansche Theorie und die SBG angeben, welches die nichtlokale Natur der Wechselwirkung explizit berücksichtigt.